Непрерывность функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X, $a \in X$, a — предельная точка X.

Определение 1. (формальное). *Функция $f(x)$ называется* **непрерывной** *в точке a, если ее предел в точке a существует и совпадает с ее частным значением в этой точке, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Замечание 1. *Для удобства дальнейшего изложения обычно договариваются по определению полагать, что в изолированных точках области определения функция является непрерывной. Тогда, например, функция $f(x) = \sqrt{\cos(2\pi x) - 1}$ считается непрерывной на области своего определения (легко видеть, что она определена только в точках $n \in \mathbb{Z}$). В частности, эта договоренность нужна для того, чтобы оставалась справедливой теорема о непрерывности всякой элементарной функции на области своего определения (мы будем говорить об этом ниже). Но подобные функции на практике встречаются редко, поэтому всюду в дальнейшем, если не оговорено обратное, будем считать, что мы находимся в ситуации, когда точка непрерывности — предельная точка области определения функции.*

Определение 2. (Гейне). *Функция $f(x)$ называется* **непрерывной** *в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к $f(a)$.*

Определение 3. (Коши). *Функция $f(x)$ называется* **непрерывной** *в точке a, если для любого вещественного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек x из множества $B_\delta(a) \cap X$ будет выполнено неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Очевидно, что определения 1–3 эквивалентны (это сразу следует из эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне).

Определение 4. *Функция $y = f(x)$ называется* **непрерывной** *в точке a* **справа (слева)**, *если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ ($\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$)*

Утверждение 1. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда она непрерывна в a и справа, и слева.*

Определение 5. *Точка a, являющаяся предельной точкой множества X, называется* **точкой разрыва** *функции $f(x)$, если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке a.*

Определение 6. *Функция $y = f(x)$* **непрерывна на множестве** *A, если она непрерывна в каждой точке $a \in A$.*

Определение 7. *Функция $y = f(x)$* **непрерывна на сегменте** *$[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и, кроме того, непрерывна в точке a справа и в точке b слева.*

Классификация точек разрыва.

1) Точка a называется `точкой устранимого разрыва` функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и конечен, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Например, $f(x) = \begin{cases} 1, \ x = 0, \\ 0, \ x \neq 0. \end{cases}$ Очевидно, что точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва функции $f(x)$.

2) Точка a называется `точкой разрыва первого рода` функции $f(x)$, если односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ существуют и конечны, но $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Например, функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода.

3) Точка a называется `точкой разрыва второго рода` функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ не существует или равен бесконечности.

Например, функция $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, так как $f(0+0) = +\infty$, $f(0-0) = -\infty$.

Функция $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \sin(1/x), & x < 0 \end{cases}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, поскольку $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$ не существует. Действительно, воспользуемся определением предела по Гейне, чтобы показать это. Рассмотрим две последовательности аргументов: $\{x'_n\} = \left\{-\dfrac{1}{\pi n}\right\}$ и $\{x''_n\} = \left\{-\dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x''_n = 0$, но $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n) = \sin(\pi n) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x''_n) = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$. Значит, не существует $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$.

Локальные свойства непрерывных функций.

Теорема 1 (арифметические операции с непрерывными функциями)**.** *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены на множестве X и непрерывны в точке $a \in X$. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ непрерывны в точке a и, если $g(a) \neq 0$, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a)$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a)$ и, в случае $g(a) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$. Далее остается воспользоваться формальным определением непрерывности функции. □

Определение 8. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ задана на множестве T; X — множество* *ее значений. Если на множестве X задана функция $y = f(x)$, то говорят, что на T определена* ***сложная функция*** *$y = f(\varphi(t))$.*

Теорема 2 (непрерывность сложной функции)**.** *Если функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в точке a, а функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ также непрерывна в точке a.*

Доказательство. Пусть $\{t_n\}$ — последовательность точек множества T, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = a$. Так как функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в точке a, то $x_n = \varphi(t_n) \to \varphi(a) = b$ при $n \to +\infty$. Но функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$, следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(b)$. Мы получили, что для любой последовательности $\{t_n\}$ аргументов, для которой $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = a$, выполнено: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\varphi(t_n)) = f(\varphi(a))$. Значит, функция $y = f(\varphi(t))$ непрерывна в точке a. □

Определение 9. *Функция $y = f(x)$* ***ограничена сверху (снизу)*** *на множестве A, если существует постоянная $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) такая, что $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$) при всех $x \in A$. Числа M и m называются соответственно* ***верхней и нижней гранями*** *функции $f(x)$ на множестве A.*

Если функция $f(x)$ ограничена на множестве A и сверху, и снизу, то она называется ***ограниченной*** *на множестве A.*

Теорема 3. *Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $f(x)$ ограничена на множестве $B_\delta(a) \cap X$.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$ выполнено: $|f(x) - b| < 1$, что равносильно $b - 1 < f(x) < b + 1$.

Если точка a не принадлежит множеству X, то получаем, что при всех x из $B_\delta(a) \cap X$ имеет место двойное неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, где $m = b - 1$, $M = b + 1$. Если же точка a принадлежит множеству X, то при всех x из $B_\delta(a) \cap X$ будет иметь место неравенство $m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1$, где $m_1 = \min\{f(a), b - 1\}$, $M_1 = \max\{f(a), b + 1\}$. И в том, и в другом случае функция $f(x)$ является ограниченной на множестве $B_\delta(a) \cap X$. □

Следствие (локальная ограниченность непрерывной функции). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a, то она является ограниченной на множестве $B_\delta(a) \cap X$ для некоторого $\delta > 0$.*

Теорема 4 (устойчивость знака функции, непрерывной в точке)**.** *Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и непрерывна в точке a. Если $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), то найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) для всех $x \in B_\delta(a) \cap X$.*

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна в точке a, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in B_\delta(a) \cap X$ выполнено: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, что равносильно

$f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$. Положим $\varepsilon = \dfrac{|f(a)|}{2} > 0$. Тогда

$$f(a)-\frac{|f(a)|}{2} < f(x) < f(a)+\frac{|f(a)|}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(a)}{2},\ f(a) > 0, \\ \dfrac{3f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{f(a)}{2} < 0,\ f(a) < 0 \end{cases} \quad \forall x \in B_\delta(a) \cap X.$$

□

Глобальные свойства непрерывных функций

Обозначим через $C[a,b]$ класс функций, непрерывных на сегменте $[a,b]$ и изучим некоторые свойства функций из этого класса.

Теорема 5. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и $f(a)\cdot f(b) < 0$. Тогда найдется такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = 0$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Пусть $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$. Заметим, что множество A не пусто (так как $a \in A$) и ограничено сверху (например, числом b). Значит, существует $\sup A = c$. Покажем, что $f(c) = 0$.

Предположим, что $f(c) > 0$. Тогда $c \neq a$ и (по теореме о сохранении знака) найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) > 0$ при всех $x \in (c-\delta, c]$. Следовательно, точка c не является точной верхней гранью множества A. Мы пришли к противоречию, значит, наше предположение неверно и $f(c) \leqslant 0$. Если $f(c) < 0$, то $c \neq b$ и найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) < 0$ при всех $x \in [c, c+\delta)$. Но это означало бы, что c не является верхней гранью множества A. Получаем, что $f(c) = 0$. □

Следствие (о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения). *Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда для любого числа γ, лежащего между значениями $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка c из сегмента $[a,b]$, что $f(c) = \gamma$.*

Доказательство. Обозначим $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\alpha \leqslant \beta$ и $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Если $\alpha = \beta$, то $\gamma = \alpha = \beta$ и утверждение очевидно. Если $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$ — тоже. Пусть $\alpha < \gamma < \beta$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \gamma$. Она удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы. Значит, существует такая точка $c \in [a,b]$, что $g(c) = 0$, то есть $f(c) = \gamma$. □

Теорема 6 (первая теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда она ограничена на этом сегменте.*

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ не ограничена на $[a,b]$ сверху. Тогда для любого натурального n найдется такая точка x_n из сегмента $[a,b]$, что $f(x_n) > n$. Рассмотрим числовую последовательность $\{x_n\}$. Она ограничена (поскольку $a \leqslant x_n \leqslant b$ при всех $n \in \mathbb{N}$), значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$. Обозначим $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n}$. Так как $x_{k_n} \in [a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\xi \in [a,b]$. Функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, следовательно, она непрерывна и в точке ξ. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f(\xi)$ (определение предела функции по Гейне). Но по построению последовательности $\{x_n\}$ имеем: $f(x_{k_n}) > k_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то есть $f(x_{k_n}) \to +\infty$. Мы пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно и функция $f(x)$ ограничена сверху. Ограниченность снизу проверяется аналогично. $\square$

Замечание 2. *В случае интервала или полуинтервала утверждение теоремы, вообще говоря, неверно. Например, функция $f(x) = \ln x$ непрерывна на интервале $(0,1)$ и на полуинтервале $(0,1]$, но не ограничена на этих промежутках.*

Определение 10. *Вещественное число M (m) называется **точной верхней (нижней) гранью** функции $f(x)$ на множестве A, если выполнены 2 условия:*
1) $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$) при всех $x \in A$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $x' \in A$, что $f(x') > M - \varepsilon$ ($f(x') < m + \varepsilon$).

Обозначения: $M = \sup\limits_{x\in A} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in A} f(x)$.

Теорема 7 (вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда она достигает на этом сегменте своих точной верхней и точной нижней граней.*

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то, согласно первой теореме Вейерштрасса, она ограничена на этом сегменте. Значит, существуют числа $M = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ и $m = \inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Предположим, что $f(x) < M$ при всех $x \in [a,b]$. Введем функцию $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Функция $g(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ (как частное двух непрерывных функций, причем знаменатель не обращается в 0), следовательно, ограничена на нем. Значит, существует число $A > 0$ такое, что $\dfrac{1}{M - f(x)} \leqslant A$ при всех $x \in [a,b]$, что равносильно $M - f(x) \geqslant \dfrac{1}{A}$ или $f(x) \leqslant M - \dfrac{1}{A}$ $\forall x \in [a,b]$. Но последнее неравенство означает, что число M не является точной верхней гранью функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение неверно, и существует точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) = M$. Аналогичные рассуждения можно провести и для точной нижней грани. $\square$

Монотонные функции.

Определение 11. *Функция $y = f(x)$ называется **неубывающей (невозрастающей)** на множестве A, если при всех $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ($f(x_1) \geqslant f(x_2)$).*

*Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на множестве A, если при всех $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).*

*Если функция $f(x)$ является неубывающей или невозрастающей, то она называется **монотонной**. Если она к тому же является возрастающей или убывающей, то она называется **строго монотонной**.*

Определение 12. *Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве X и имеет множество значений Y. Если для любого элемента y из множества Y существует единственный соответствующий элемент $x \in X$ (то есть отображение $f : X \to Y$ является взаимно однозначным), то говорят, что на множестве Y задана* ***обратная функция*** *$x = f^{-1}(y)$, которая каждому $y \in Y$ ставит в соответствие элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.*

Пример 1. *1) Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$, $x \in [0,2]$. Тогда $y = f(x) \in [0,4]$, $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.*

2) Рассмотрим функцию $y = f(x) = \begin{cases} x, & x - \text{рациональное}, \\ 1-x, & x - \text{иррациональное}; \end{cases}$, $\quad X = [0,1]$.

Тогда $Y = [0,1]$, $x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y - \text{рациональное}, \\ 1-y, & y - \text{иррациональное}. \end{cases}$

Пусть теперь функция $y = f(x)$ определена на сегменте $[a,b]$, $c \in [a,b]$. Введем следующие обозначения:

$$F_c^+ = \{f(x) \,|\, c < x \leqslant b\}\,(c \neq b); \quad F_c^- = \{f(x) \,|\, a \leqslant x < c\}\,(c \neq a).$$

Теорема 8 (о точках разрыва монотонной функции)**.** *Пусть функция $y = f(x)$ не убывает (не возрастает) на сегменте $[a,b]$. Тогда*
1) она может иметь на $[a,b]$ только разрывы первого рода, причем для любой точки $c \in [a,b]$ имеют место соотношения:

$$f(c+0) = \inf F_c^+ = l_1\,(c \neq b); \quad f(c-0) = \sup F_c^- = l_2\,(c \neq a); \quad l_2 \leqslant f(c) \leqslant l_1$$

$$(f(c+0) = \sup F_c^+ = l_1\,(c \neq b); \quad f(c-0) = \inf F_c^- = l_2\,(c \neq a); \quad l_1 \leqslant f(c) \leqslant l_2).$$

2) Множество точек разрыва функции $f(x)$ на $[a,b]$ не более чем счетно.

Доказательство. Пусть $f(x)$ не убывает (случай, когда функция не возрастает, рассматривается аналогично).

1) Обозначим $l_1 = \inf F_c^+$, $c \in [a,b)$. Заметим, что $\inf F_c^+$ существует, так как $F_c^+ \neq \emptyset$ ($f(b) \in F_c^+$) и F_c^+ ограничено снизу (например, числом $f(c)$).

Тогда: 1. $f(x) \geqslant l_1$ $\forall x > c$; 2. $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая точка $x' > c$, что $f(x') < l_1 + \varepsilon$. Так как $f(x)$ не убывает, то из 1., 2. следует, что $l_1 \leqslant f(x) < l_1 + \varepsilon$ при всех $x \in (c, x']$. Это означает, что $l_1 = \lim\limits_{x \to c+0} f(x)$. Поскольку число $f(c)$ является одной из нижних граней множества F_c^+, то $f(c) \leqslant l_1 = \inf F_c^+$.

Аналогично доказывается, что $f(c-0) = l_2$, $f(c) \geqslant l_2$, где $l_2 = \sup F_c^-$.

2) Пусть c — точка разрыва функции $f(x)$. Тогда, по доказанному в пункте 1, $f(c-0) < f(c+0)$. Значит, найдется такое рациональное число r_c, что $f(c-0) < r_c < f(c+0)$. Пусть c_1, c_2 — две различные точки разрыва $f(x)$, $c_1 < c_2$. Тогда $f(c_1+0) \leqslant f(c_2-0)$ (действительно, $f(c_1+0) = \inf F_c^+ = \inf\{f(x) \,|\, c_1 < x < c_2\}$; $f(c_2-0) = \sup F_c^- = \sup\{f(x) \,|\, c_1 < x < c_2\}$). Значит, $r_{c_1} < r_{c_2}$, то есть разным точкам разрыва функции $f(x)$ соответствуют различные рациональные числа.

Мы показали, таким образом, что множество точек разрыва функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ эквивалентно некоторому подмножеству множества рациональных чисел. Это означает, что оно является пустым, конечным или счетным. $\square$

Теорема 9 (критерий непрерывности монотонной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ определена и монотонна на сегменте $[a,b]$. Тогда $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ в том и только в том случае, когда для любого числа l, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = l$ (другими словами, монотонная на сегменте функция является непрерывной на этом сегменте тогда и только тогда, когда она принимает все промежуточные значения между значениями в концах этого сегмента).*

Доказательство. Предположим, не ограничивая общности, что функция $f(x)$ не убывает на $[a,b]$.

Необходимость сразу следует из теоремы о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $c \in [a,b]$. Тогда $l_2 = f(c-0) < f(c+0) = l_1$ и $l_2 \leqslant f(c) \leqslant l_1$ (если $c = a$, то $l_2 = f(a)$; если $c = b$, то $l_1 = f(b)$). Предположим, что число $l \in (l_2, l_1)$ и $l \neq f(c)$. Тогда при всех $x < c$ имеем: $f(x) \leqslant l_2 < l$ (так как $l_2 = \sup F_c^-$) и при всех $x > c$ имеем: $f(x) \geqslant l_1 > l$ (так как $l_1 = \inf F_c^+$). Но это означает, что функция $f(x)$ не принимает значение l из сегмента $[f(a), f(b)]$, что противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение о том, что $f(x)$ имеет разрыв в точке c, неверно. Получаем, что функция $f(x)$ непрерывна всюду на сегменте $[a,b]$. $\square$

Теорема 10 (об обратной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда существует функция $x = g(y)$, которая определена на сегменте $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$), возрастает (убывает) и непрерывна на нем, причем $g(f(x)) = x$ для всех $x \in [a,b]$, то есть $g = f^{-1}$.*

Доказательство. Предположим, не ограничивая общности, что $f(x)$ возрастает на $[a,b]$.

1) Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то, согласно критерию непрерывности монотонной функции, для любого значения $y \in [f(a), f(b)]$ найдется точка $x \in [a,b]$ такая, что $f(x) = y$. При этом, если $x_1 \neq x_2$, то и $f(x_1) \neq f(x_2)$ (поскольку $f(x)$ строго монотонна). Значит, для любой точки $y \in [f(a), f(b)]$ существует единственное значение $x \in [a,b]$ такое, что $f(x) = y$. Это означает, что на сегменте $[f(a), f(b)]$ определена обратная функция $x = g(y)$.

2) Пусть $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$, $y_1 < y_2$. Если предположить, что $x_1 = g(y_1) \geqslant g(y_2) = x_2$, то получим, что $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (так как функция $f(x)$ возрастает). Но это означает, что $y_1 \geqslant y_2$, что неверно. Мы получили, что из неравенства $y_1 < y_2$ следует неравенство $g(y_1) < g(y_2)$, то есть функция $x = g(y)$ также возрастает.

3) Заметим, что возрастающая функция $x = g(y)$ принимает все значения из сегмента $[a,b]$ (так как функция $y = f(x)$ определена всюду на этом сегменте). Отсюда следует, в силу критерия непрерывности монотонной функции, что функция $x = g(y)$ является непрерывной на сегменте $[f(a), f(b)]$. $\square$